第 37 講　総合問題(5)

1　a を正の定数とし，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=1$ で囲まれる領域を D とする．y 軸上の点を中心とし，領域 D に含まれる円の半径の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　原点Oを中心とし，半径1の円をCとする．

(1)　直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円Cの2本の接線を引き，その接点をM, Nとする．直線OPと弦MNの交点をQとする．点Qの座標を t を用いて表せ．ただし，t は実数とする．

(2)　点Pが直線 $y=2$ 上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ k を正の実数とし，点 $(3k,\ 4k)$ を中心とする半径 $5k+1$ の円を C_k とする．k がすべての正の実数値をとって変化するとき，円 C_k の動く範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

［2］ O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする．

⑴ C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

⑵ 点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　総合問題(5)

実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\dfrac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる 2 本の接線を引き，2 つの接点を通る直線を l とする．

(1)　直線 l の方程式は　$x+$ ア $ty=$ イ　である．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点がある．この点の座標は (ウ , エ) である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

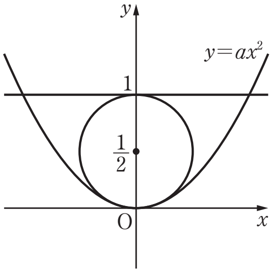
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　総合問題(5)

1　a を正の定数とし，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=1$ で囲まれる領域を D とする．y 軸上の点を中心とし，領域 D に含まれる円の半径の最大値を求めよ．

円の半径を r とすると，(円の直径)$\leqq 1$　より　$2r\leqq 1$　　よって　　$r\leqq\dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$ のとき　円の中心の座標は　$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$



$y=ax^2$　つまり　$x^2=\dfrac{y}{a}$　　これと　$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$　より

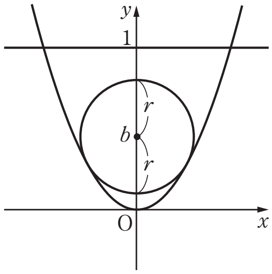
$\dfrac{y}{a}+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$ay^2+(1-a)y=0$　　$y\{ay+(1-a)\}=0$　　$y=0,\ \dfrac{a-1}{a}$

交点が O のみより　$\dfrac{a-1}{a}\leqq 0$　　よって　$0<a\leqq 1$

したがって　$0<a\leqq 1$　のとき　r の最大値は　$\dfrac{1}{2}$　である．

$a>1$ のとき　円の中心の座標を $(0,\ b)$ とすると，



$y=ax^2$　と　$x^2+(y-b)^2=r^2$　より

$ay^2+(1-2ab)y+a(b^2-r^2)=0$

これが重解をもつとき，放物線と円は接する．

$(1-2ab)^2-4a^2(b^2-r^2)=0$　　$4a^2r^2-4ab+1=0$

よって　$b=\dfrac{4a^2r^2+1}{4a}$

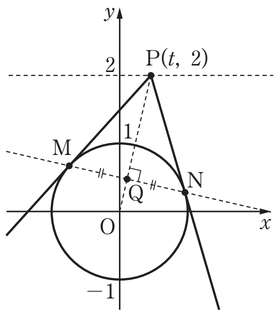
またグラフより　$b+r\leqq 1$　つまり　$\dfrac{4a^2r^2+1}{4a}+r\leqq 1$

$4a^2r^2+4ar+1-4a\leqq 0$　　よって　$r\leqq\dfrac{-1+2\sqrt{a}}{2a}$

以上より　求める半径の最大値は　**$0<a\leqq 1$　のとき　$\dfrac{1}{2}$　　$a>1$　のとき　$\dfrac{-1+2\sqrt{a}}{2a}$**

2　原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする． (1)　直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C の 2 本の接線を引き，その接点を M, N とする．直線 OP と弦 MN の交点を Q とする．点 Q の座標を t を用いて表せ．ただし，t は実数とする． (2)　点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



(1)　直線 OP の方程式は　$2x-ty=0$　……①

$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$　とおく．

M，N における円 C の接線の方程式はそれぞれ

$x_1x+y_1y=1,\quad x_2x+y_2y=1$

これらがともに　$P(t,\ 2)$ を通るので

$tx_1+2y_1=1,\quad tx_2+2y_2=1$

これらは，直線　$tx+2y=1$ が M，N を通ることを示す．

したがって直線 MN の方程式は　$tx+2y=1$　……②

①，②より　$x=\dfrac{t}{t^2+4}$，$y=\dfrac{2}{t^2+4}$　よって　**Q** $\left(\boldsymbol{\dfrac{t}{t^2+4},\ \dfrac{2}{t^2+4}}\right)$

(2)　$Q(X,\ Y)$ とおくと，$X=\dfrac{t}{t^2+4}$　……③　　$Y=\dfrac{2}{t^2+4}$　……④

③，④より　$\dfrac{X}{t}=\dfrac{Y}{2}$　よって　$t=\dfrac{2X}{Y}$

これを④に代入して　$Y=\dfrac{2}{\dfrac{4X^2}{Y^2}+4}=\dfrac{Y^2}{2X^2+2Y^2}$

$2X^2Y+2Y^3=Y^2$　　$X^2+Y^2-\dfrac{1}{2}Y=0$　　$X^2+\left(Y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$

$Y=0$ のとき　$X^2=0$　　$X=0$　　よって　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

したがって　求める軌跡は　**円** $\boldsymbol{x^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}}$　**（ただし点 (0，0) は除く）**

3　[1]　k を正の実数とし，点 $(3k,\ 4k)$ を中心とする半径 $5k+1$ の円を C_k とする．k がすべての正の実数値をとって変化するとき，円 C_k の動く範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

$C_k:(x-3k)^2+(y-4k)^2=(5k+1)^2$　　これを k について整理すると

$(6x+8y+10)k+(-x^2-y^2+1)=0$　……①

$6x+8y+10=0$ のとき　$-x^2-y^2+1=0$　これらより　$x=-\dfrac{3}{5}$，$y=-\dfrac{4}{5}$

よって①は k の値に関わらず　$\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$ を通る．

$6x+8y+10>0$ のとき　$k>0$ より

①を満たす $(x,\ y)$ の描く領域は　$-x^2-y^2+1<0$　　つまり　$x^2+y^2>1$

$6x+8y+10<0$ のとき　$k>0$ より

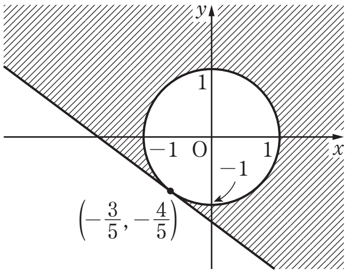
①を満たす $(x,\ y)$ の描く領域は　$-x^2-y^2+1>0$　　つまり　$x^2+y^2<1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より，求める範囲は右図斜線部.

境界は $\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$ を含み，

他は含まない.



> 3 ［2］　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の　$|x|\geqq 1$　を満たす部分を C とする.
>
> (1)　C 上に点 A$(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ.
>
> (2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，図示せよ.

(1)　求める直線は OA の中点 $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，直線 OA $\left(\text{傾き } \dfrac{1}{t}\right)$ に垂直な直線である.

よって　$y=-t\left(x-\dfrac{t}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$　より　$\boldsymbol{y=-tx+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}}$　……①

(2)　①より $t^2-2xt-2y+1=0$　……②

②の左辺を $f(t)$ とおくと，$y=f(t)$ のグラフの軸は　$t=x$

②が $|t|\geqq 1$ に少なくとも 1 解をもつのは

「$f(-1)\leqq 0$」または「$f(1)\leqq 0$」または　「$f(-1)>0$，$f(1)>0$，$|x|>1$，判別式 $D\geqq 0$」

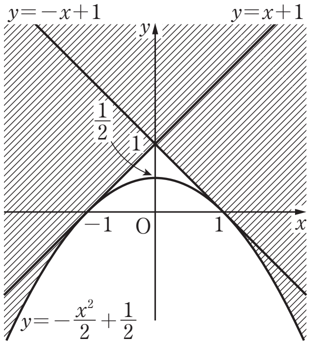
つまり「$y\geqq x+1$」

　　または「$y\geqq -x+1$」

　　または「$y<x+1$，$y<-x+1$，$|x|>1$，$y\geqq -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$」

のときである.

よって求める範囲は，右図斜線部分. 境界含む.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　総合問題(5)

実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる 2 本の接線を引き，2 つの接点を通る直線を l とする．

(1)　直線 l の方程式は　$x+$ ア $ty=$ イ　である．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点がある．この点の座標は（ ウ ， エ ）である．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた相異なる接線を l_1，l_2 とし，l_1，l_2 と円との接点をそれぞれ$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，l_1，l_2 の方程式はそれぞれ

$x_1x+y_1y=1$，　$x_2x+y_2y=1$

と表される．これらがともに　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ を通るので

$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1$，$\frac{1}{2}x_2+ty_2=1$

これらは直線　$\frac{1}{2}x+ty=1$ が 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通ることを表している．

したがって求める直線 l の方程式は　$\frac{1}{2}x+ty=1$　つまり　$\boldsymbol{x+2ty=2}$　である．

(2)　$x+2ty=2$　より　$2yt+(x-2)=0$

これが $t>1$ である任意の実数 t で成り立つための条件は

$2y=0$　かつ　$x-2=0$　　つまり　$x=2,\ y=0$　である．

したがって，l は t $(t>1)$ の値によらず定点　$\boldsymbol{(2,\ 0)}$　を通る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。